我是8位的

I am 8 bits, what about you?

线性代数笔记9——消元矩阵与置换矩阵

消元矩阵

如果用矩阵表示一个有解的方程组，那么矩阵经过消元后，最终能变成一个上三角矩阵U。用一个三元一次方程组举例：

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-z=0 \\ y-2z=-2 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -7/3 \end{array}\right]$$

A经过一些列变换，最终得到了一个上三角矩阵U：

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

回代到方程组后可以直接求解：

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ -3y-3z=-1 \\ -3z=-7/3 \end{cases}$$

如果上面的变换去掉增广矩阵，可以简写为：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{E_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A_2} \xrightarrow{E_{32}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{U}$$

矩阵的初等变换可以用矩阵乘法实现，现在的问题是，我们能否得到一个可以表示整个消元过程的矩阵E，使得E与A相乘能够直接得到U？还是以上面的矩阵为例，第一次变换是用第二行加上第一行的-1倍，所以只需将A的左边乘以E_{21}就可以：

$$E_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

这里的矩阵E_{21}又是怎么来的呢？这需要回归一下消元的过程：

首先，A的第一行不变，因此我们需要拿出A的1个第一行，0个第二行，0个第三行，于是(1 ,0, 0)组成了E_{21}的第一行；

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

<			2022年3月			>
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
欢迎关注微信公众号“我是8位的”

昵称： 我是8位的
园龄： 4年7个月
粉丝： 288
关注： 5
+加关注

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

然后，我们需要-1个A的第一行，1个第二行，0个第三行进行线性组合，所以(-1, 1, 0)组成了E_{21}的第二行；

最后，因为A的第三行不变，因此需要0个第一行，0个第二行，1个第三行，所以E_{21}的第三行是(0, 0, 1)。

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}}_{A}\begin{array}{c}\xrightarrow{(1,0,0)}\\ \xrightarrow{(-1,1,0)}\\ \xrightarrow{(0,0,1)}\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}}_{A_2}$$

$$E_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

经过变换，得到了A2，可以用$E_{21}A = A_2$表示。A_2继续变换：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}}_{A_2}\begin{array}{c}\xrightarrow{(1,0,0)}\\ \xrightarrow{(0,1,0)}\\ \xrightarrow{(0,1/3,1)}\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}}_{U}$$

$$E_{32}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/3 & 1\end{bmatrix}$$

最终，$E_{32}(E_{21}A) = (E_{32}E_{21})A = U$，$E = E_{32}E_{21}$

置换矩阵

同样可以使用矩阵相乘来完成行交换和列交换。

首先是行交换，对矩阵进行如下变换：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}}_{A}\xrightarrow{S_{12}}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}}_{A_2}$$

对于A_2的第一行，相当于从A中拿出了0个第一行，1个第二行，0个第三行；

对于A_2的第二行，相当于从A中拿出了1个第一行，0个第二行，0个第三行；

对于A_2的第三行，相当于从A中拿出了0个第一行，0个第二行，1个第三行。

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}}_{A}\begin{array}{c}\xrightarrow{(0,1,0)}\\ \xrightarrow{(1,0,0)}\\ \xrightarrow{(0,0,1)}\end{array}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}}_{A_2}$$

$$P_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P_{12}A = A_2$$

上面的P_{12}称为行置换矩阵。可以看出置换矩阵是一个每行只有一个维度是1的满秩矩阵，或者说是行重新排列了的单位矩阵，它的一个特性是 P^{-}

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU

1 = P^T

行交换与行交换类似，但是需要将左乘变为右乘。

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{C_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\2 & 1 & 3\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}}_{A_2}$$

对于A_2的第一列，相当于从A中拿出了0个第一列，1个第二列，0个第三列；

对于A_2的第二列，相当于从A中拿出了1个第一列，0个第二列，0个第三列；

对于A_2的第三列，相当于从A中拿出了0个第一列，0个第二列，1个第三列。

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}}_{A} \begin{matrix}\xrightarrow{(0,1,0)}\\ \xrightarrow{(1,0,0)}\\ \xrightarrow{(0,0,1)}\end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\2 & 1 & 3\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}}_{A_2}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$AC_{12} = A_2$$

C_{12}称为列置换矩阵。注意列置换矩阵的结果，是按照列构成的。

作者：我是8位的

出处：http://www.cnblogs.com/bigmonkey

随笔

分类: 线性代数

标签: 消元矩阵, 置换矩阵

« 上一篇: 寻找“最好”（5）——无解之解
» 下一篇: 线性代数笔记10——矩阵的LU分解