

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

- 博客园
- 首页
- 新随笔
- 联系
- 订阅
- 管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力
 欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的
 园龄：4年7个月
 粉丝：288
 关注：5
 +加关注

盖楼抽奖
 #她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
 分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

[马上参与](#)

搜索

常用链接

- 我的随笔
- 我的评论
- 我的参与
- 最新评论
- 我的标签

积分与排名

积分 - 457097
 排名 - 1198

线性代数笔记9——消元矩阵与置换矩阵

消元矩阵

如果用矩阵表示一个有解的方程组，那么矩阵经过消元后，最终能变成一个上三角矩阵U。用一个三元一次方程组举例：

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \\ y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -7/3 \end{array} \right]$$

A经过一些列变换，最终得到了一个上三角矩阵U：

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

回代到方程组后可以直接求解：

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -3y - 3z = -1 \\ -3z = -7/3 \end{cases}$$

如果上面的变换去掉增广矩阵，可以简写为：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_A \xrightarrow{E_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A_2} \xrightarrow{E_{32}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_U$$

矩阵的初等变换可以用矩阵乘法实现，现在的问题是，我们能否得到一个可以表示整个消元过程的矩阵E，使得E与A相乘能够直接得到U？还是以上面的矩阵为例，第一次变换是用第二行加上第一行的-1倍，所以只需将A的左边乘以E₂₁就可以：

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

这里的矩阵E₂₁又是怎么来的呢？这需要回归一下消元的过程：

首先，A的第一行不变，因此我们需要拿出A的1个第一行，0个第二行，0个第三行，于是(1, 0, 0)组成了E₂₁的第一行；

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (2976 8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一) ——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一) ——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一) ——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二) ——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

然后, 我们需要-1个A的第一行, 1个第二行, 0个第三行进行线性组合, 所以 $(-1, 1, 0)$ 组成了 E_{21} 的第二行;

最后, 因为A的第三行不变, 因此需要0个第一行, 0个第二行, 1个第三行, 所以 E_{21} 的第三行是 $(0, 0, 1)$ 。

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{(1,0,0)} \\ \xrightarrow{(-1,1,0)} \\ \xrightarrow{(0,0,1)} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ A & & A_2 \end{array}$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

经过变换, 得到了 A_2 , 可以用 $E_{21}A = A_2$ 表示。 A_2 继续变换:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{(1,0,0)} \\ \xrightarrow{(0,1,0)} \\ \xrightarrow{(0,1/3,1)} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ A_2 & & U \end{array}$$

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

最终, $E_{32}(E_{21}A) = (E_{32}E_{21})A = U$, $E = E_{32}E_{21}$

置换矩阵

同样可以使用矩阵相乘来完成行交换和列交换。

首先是行交换, 对矩阵进行如下变换:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \xrightarrow{S_{12}} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ A & & A_2 \end{array}$$

对于 A_2 的第一行, 相当于从A中拿出了0个第一行, 1个第二行, 0个第三行;

对于 A_2 的第二行, 相当于从A中拿出了1个第一行, 0个第二行, 0个第三行;

对于 A_2 的第三行, 相当于从A中拿出了0个第一行, 0个第二行, 1个第三行。

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \xrightarrow{(0,1,0)} \\ \xrightarrow{(1,0,0)} \\ \xrightarrow{(0,0,1)} \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ A & & A_2 \end{array}$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{12}A = A_2$$

上面的 P_{12} 称为行置换矩阵。可以看出置换矩阵是一个每行只有一个维度是1的满秩矩阵, 或者说是行重新排列了的单位矩阵, 它的一个特性是 P^T

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)

很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$1 = p^T$$

行交换与行交换类似，但是需要将左乘变为右乘。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_A \xrightarrow{C_{12}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A_2}$$

对于A₂的第一列，相当于从A中拿出了0个第一列，1个第二列，0个第三列；

对于A₂的第二列，相当于从A中拿出了1个第一列，0个第二列，0个第三列；

对于A₂的第三列，相当于从A中拿出了0个第一列，0个第二列，1个第三列。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_A \xrightarrow{\begin{matrix} (0,1,0) \\ (1,0,0) \\ (0,0,1) \end{matrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A_2}$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC_{12} = A_2$$

C₁₂称为列置换矩阵。注意列置换矩阵的结果，是按照列构成的。

作者: 我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途!

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



分类: [线性代数](#)

标签: [消元矩阵](#), [置换矩阵](#)

好文要顶 关注我 收藏该文  

 我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

2 0
[推荐](#) [反对](#)

« 上一篇: [寻找“最好” \(5\) ——无解之解](#)
» 下一篇: [线性代数笔记10——矩阵的LU分解](#)

posted on 2018-08-28 17:43 我是8位的 阅读(10841) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 [登录后才能查看或发表评论, 立即 登录 或者 逛逛 博客园首页](#)

【推荐】 [华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事](#)
【推荐】 [华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界](#)

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS_文档在线预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等, 特定格式的合作, 支持Windows、信创环境下一键部署

[打开](#)

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够买菜
- » [更多新闻...](#)

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes